تمارين (1)

(1) استخدم طريقة بيكارد لإيجاد التقريب الثالث لحل المسائل الإبتدائية التاليه :

$$(1)\ \frac{dy}{dx} = x + y^2 \qquad , \qquad y(0) = 0$$

$$(2)\ \frac{dy}{dx} = 2y - 2x^2 - 3 \qquad , \qquad y(0) = 2$$

$$(3)\ \frac{dy}{dx} = y^2 + 1 \qquad , \qquad y(0) = 0$$

$$(4)\ y' = x\left(y - x^2 + 2\right) \qquad , \qquad y(0) = 0$$

$$(5)\ y' = 2xy \qquad , \qquad y(0) = 1$$

$$(6)\ \frac{dy}{dx} = 3e^x + 2y \qquad , \qquad y(0) = 0$$

(7) استخدم طريقة بيكارد لإيجاد حل مسألة القيمه الإبتدائيه :

$$y' = y - x \qquad , \qquad y(0) = 2$$

ثم اثبت ان الحل التقريبي يقترب من الحل المضبوط .

(8) بتغيير نقطة البداية x_0 إلى الصفر ، اوجد حل المسأله الإبتدائيه التاليه مستخدم طريقة بيكارد التقريبيه :

$$y' = 1 - xy \qquad , \qquad y(1.5) = 0$$

(9) اثبت أن $f(x, y) = xy^2$ تحقق شرط ليبشز على المستطيل

$$S: |x| \le 1 \quad , \quad |y| \le 1$$

(10) إذا كانت $f(x, y) = y^{\frac{2}{3}}$ فاثبت ان شرط ليبشز غير متحقق في منطقة تحوي نقطة الأصل .

تمارين (2)

اوجد حل منظومات المعادلات التفاضليه التاليه حيث t المتغير المستقل :

$$(1)\quad x' + y' - x + 3y = e^{-t} - 1$$
$$x' + 2x + y' + y = e^{2t} + t$$

$$(2)\quad \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + y = -e^{t}$$
$$x + \frac{dy}{dt} - y = e^{2t}$$

$$(3)\quad Dx+y=x$$
$$Dy-3y=0$$

$$(4)\quad \ddot{x}-4x+\dot{y}=0$$
$$-4\dot{x}+\ddot{y}+2y=0$$

$$(5)\quad \left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + x + y = 0 \\ &\frac{dx}{dt} + 3x + 3y = 0 \end{aligned}\right\} \;,\; y(0)=1 \;,\; x(0)=3$$

(6) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - x - 2y = t$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2y - 3x = 1$

(7) $(D-2)x - y = 0$

$(D-1)y = 6e^{-t}$

$Dz - x = 2\sin t$

(8) اكتب النظام التالي على صورة مصفوفيه :

$$\frac{dx}{dt} = 6x + y + z + t$$
$$\frac{dy}{dt} = 8x + 7y - z + 10t$$
$$\frac{dz}{dt} = 2x + 9y - z + 6t$$

(9) اثبت أن $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$ هي حلول للنظام :

$X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X$ وادرس كونها حلين مستقلين ام لا ؟

(10) اثبت ان $X = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ هو حل للنظام :

$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} X$؟

اوجد الحل العام لكل من الانظمه التاليه بإستخدام المصفوفات :

$$(11)\ \frac{dx}{dt} = 2x + 3y$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + y$$

$$(12)\ X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X$$

(13) اوجد الحل العام للنظام $X' = AX$ حيث $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ؟

تمارين (3)

أوجد حل المعادلات التفاضليه التاليه:

$$(1)\, x^2y'' - xy' + 4y = \cos\ln x + \sin\ln x$$

$$(2)\, (x+1)^2 y'' + (x+1)y' = (2x+3)(2x+4)$$

$$(3)\, x^2y'' + 7xy' + 9y = x^2 + \frac{1}{x}$$

$$(4)\, (1+2x)^2 y'' - 6(1+2x)y' + 16y = 8(1+2x)^2$$

$$(5)\, y'' + \frac{3}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$(6)\, (x+1)^2 y'' + (x+1)y' - 2y = x^2$$

$$(7)\, xy'' + y' - \frac{4}{x}y = x^2 \quad , \ y(1) = 1 \ , \ y'(1) = 3$$

$$(8)\, x^2y'' + 2x^3y' + \left(x^4 + x^2 + \frac{1}{4}\right)y = 0$$

$$(9)\, y'' - (2\cot x)y' + (2\cot^2 x)y = 3\sin 2x$$

$$(10)\, y'' - \frac{2}{x}y' + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)y = xe^x$$

تمارين (4)

اوجد الحل العام للمعادلات التفاضليه التاليه بإحلال W بدلا من المتغير x :

$$(1)\ y'' - \frac{x}{1-x^2}y' + \frac{2}{1-x^2}y = 0$$

$$(2)\ x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^3 - x^2$$

$$(3)\ y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$$

$$(4)\ x^4y'' + 2x^3y' + y = \frac{2x^2+1}{x^2}$$

اوجد الحل العام للمعادلات التفاضليه التاليه بإستخدام طريقة تخفيض الرتبه:

$$(5)\ x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^3 - x^2$$

$$(6)\ \left(x^2+1\right)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

$$(7)\ xy'' - (x+3)y' + 3y = 4x^4e^x$$

$$(8)\ \left(x^2+1\right)y'' - 2xy' + 2y = 6\left(x^2+1\right)^2$$

اوجد الحل العام للمعادلات التفاضليه التاليه :

$$(9)\ y'' - (2\tan x)y' + 3y = 2\sec x$$

$$(10)\ xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = \left(x^2+x-1\right)e^{2x}$$

$$(11)\ y'' - \frac{x}{1-x^2}y' + \frac{2}{1-x^2}y = 0$$

تمارين (5)

اوجد الحل العام للمعادلات التفاضليه التاليه بتحليل المؤثر التفاضلي :

$$(1)\left(xD^2 - 3D + \frac{3}{x}\right)y = 2x^2 - x$$

$$(2)xy'' + (2x+3)y' + 4y = e^{2x}$$

$$(3)\left(xD^2 - xD + 1\right)y = x^2$$

$$(4)xy'' + (1-x)y' - 2(1+x)y = (1-6x)e^{-x}$$

$$(5)(x+3)y'' - (2x+7)y' + 2y = (x+3)^2 e^x$$

$$(6)x^2y'' + x^2y' - (x+2)y = 0$$

اوجد الحل العام للمعادلات التفاضليه التامه التاليه :

$$(7)xy'' + \left(x^2 + x + 2\right)y' + (2x+1)y = 10$$

$$(8)xy'' - (2x-3)y' - 2y = e^{2x}$$

$$(9)\left(1-x^2\right)y'' - 3xy' - y = 1$$

اوجد حل المعادلات التفاضليه الاتيه :

$$(10)\left(x^2 + 2x + 2\right)y'' + 4(x+1)y' + 2y = \left(x^2 + 6x + 8\right)e^x$$

$$(11)(x-1)y'' - xy' + y = \frac{(x-1)^2}{x}$$

تمارين (6)

ادرس وضع النقطه $x = 0$ من حيث كونها (نقطه عاديه – نقطه شاذه منتظمه – نقطه شاذه غير منتظمه) :

$$(1)\ 2x(1-x)y'' + (1-x)y' + 7y = 0$$

$$(2)\ (1-x^2)y'' - 5xy + 9y = 0$$

$$(3)\ (x-x^2)y'' + (1-5x)y' + 3y = 0$$

تمارين (7)

عين النقطه العاديه والشاذه مع تحديد نوع النقاط الشاذه لكل من المعادلات التفاضليه التاليه :

$$(1)\,x^2y'' + xy' + x^2y = 0$$

$$(2)\,(x - x^2)y'' - (1 + 2x)y' + 2y = 0$$

$$(3)\,\left((x+1)^2 - 2(x+1) + 2\right)y'' + 2xy' = 0$$

اوجد الحل المتسلسل حول $x = 0$ لكل من المعادلات التفاضليه التاليه :

$$(4)\,y' - y = x + 3$$

$$(5)\,(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$$

$$(6)\,(1 - 2x)y'' + y = 0 \quad , \quad y(0) = 3 \quad , \quad y'(0) = 1$$

$$(7)\,(1 - x^2)y'' - 5xy' - 8y = 0$$

$$(8)\,2xy'' + y' + y = 0$$

$$(9)\,(2x + x^3)y'' - y' - 6xy = 0$$

$$(10)\,2x(1 - x)y'' + (1 - x)y' + 3y = 0$$

$$(11)\,2xy'' + (x + 1)y' + 3y = 0$$

تمارين (8)

اوجد الحل العام للمعادلات التفاضليه التاليه حول $x = 0$:

$(1)\, x^2y'' - xy' + (x^2+1)y = 0$

$(2)\, (x - x^2)y'' - (1+2x)y' + 2y = 0$

$(3)\, (2+x^2)y'' + xy' + (1+x)y = 0$

$(4)\, y'' + x^2y = 0$

$(5)\, xy'' + y' + x^2y = 0$

$(6)\, x(x-1)y'' - 3xy' - y = 0$

$(7)\, x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0$

$(8)\, (x - x^2)y'' + (1-x)y' - y = 0$

$(9)\, xy'' + (x-1)y' - y = 0$

(10) اوجد حل معادلة بسل التفاضليه التاليه حول النقطه $x = 0$:

$$x^2y'' + xy' + (x^2-4)y = 0$$

(11)اوجد حل معادلة لاجندر التفاضليه التاليه حول $x = 0$:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$