الدرس الأول

تعريف :

لتكن X مجموعه ما غير خاليه ، τ تجمع من المجموعات الجزئيه في X تحقق الشروط التاليه:

1- τ تحتوي المجموعتين ϕ, X .

2 - اتحاد أي عدد من عناصر τ يكون عنصرا فيτ .

3- تقاطع أي عنصرين من عناصر τ يكون عنصرا في τ .

يسمى τ تبولوجي(Topology) على X

ويسمى الزوج المرتب (X,τ) فضاء تبولوجيا(Topological Spaces)، ويسمى كل عنصر A من عناصر τ مجموعه مفتوحه (Open set)

مثال :

بين أي من المجموعات التاليه يشكل تبولوجيا على $X=\{a,b,c,d\}$

$$\tau_1=\{X,\varphi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,d\},\{a,c,d\}\}$$

$$\tau_2=\{X,\varphi,\{a,b\},\{a,c\}\}$$

$$\tau_3=\{X,\varphi,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{b,c,d\}\}$$

$$\tau_4=\{\varphi,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{b,c,d\}\}$$

$$\tau_5=\{X,\varphi,\{a\}\}$$

الحل :

1- واضح أن τ_1 لا تشكل تبولوجي على X لأن

$$\{a,b\},\{b,d\} \in \tau_1$$

ولكن $\{a,b\} \cup \{b,d\} = \{a,b,d\} \notin \tau_1$

أي أن τ_1 لا تحقق الشرط الثاني من التعريف.

2- نلاحظ أن τ_2 لاتشكل تبولوجي على X لأن

$$\{a,b\},\{a,c\} \in \tau_2$$

ولكن

$$\{a,b\} \cap \{a,c\} = \{a\} \notin \tau_2$$

أي أن τ_2 لا تحقق الشرط الثالث من التعريف .

3- τ_3 تشكل تبولوجي على X لأن τ_3 تحقق الشروط المعطاه في التعريف ومن ثم فإن (X,τ_3) تشكل فضاء تبولوجي.

4- لا تشكل تبولوجي لأن X لا تنتمي إلى τ_4 .

5- تشكل تبولوجي على X لأن τ_5 تحقق الشروط المعطاه في التعريف ومن ثم فإن (X,τ_5) تشكل فضاء تبولوجي.

مثال:

لتكن $X=\{a,b,c\}$

$$\tau=\{X,\varphi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$$

1) هل τ يمثل تبولوجي على X ؟

نعم يمثل وذلك لتحقق الشروط

2) هل المجموعه $\{a,b\},\{a,c\},\{c\}$ مجموعات مفتوحه ؟

$\{a,c\},\{c\}$ ليسا مجموعات مفتوحه لأنهما لا ينتميان إلى τ

ولكن $\{a,b\}$ مجموعه مفتوحه لأنها تنتمي إلى τ

مثال :

لتكن X أي مجموعه ونعرف $\tau=\{X,\varphi\}$

هل τ تبولوجي على X ؟

نعم وهو أصغر تبولوجي يعرف على X

ويسمى بالتبولوجي الغير متقطع أو غير منفصل أو غير هيكلي

(Indiscrete toplogy)

وأحيانا يرمز للفضاء الغير منفصل بالرمز(X,I) .

مثال :

لتكن X أي مجموعه فإن اكبر تبولوجي على X هو

$\tau = P(X)$ أي مجموعة جميع المجموعات الجزئيه من X

ويسمى بالتبولوجي المتقطع أو المنفصل أو الهيكلي (discrete toplogy)

وأحيانا يرمز للفضاء المنفصل بالرمز (X,D) .

مثال:

اثبت صحة أو خطأ العبارات التاليه:

1- التبولوجي المعرف على أي مجموعه يكون وحيد (خطأ)

التبولوجي المعرف على أي مجموعه ليس وحيد

مثال على ذلك

إذا كانت $X = \{a,b\}$ فممكن تعريف التبولوجيات التاليه على X

$$\tau = \{X, \varphi\}$$

$$\tau = \{X, \varphi, \{b\}\}$$

$$\tau = \{X, \varphi, \{a\}\}$$

$$\tau = \{X, \varphi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

2- إذا كانت $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \ldots, \tau_n$
تبولوجيات معرفه على X
فإن اتحاد هذه التبولوجيات يمثل تبولوجي على X (خطأ)

لا ..... لا يشترط ذلك
مثال يوضح خطأ العباره السابقه
إذا كان $X = \{a, b, c\}$

$$\tau_1 = \{X, \varphi, \{a\}\}$$
$$\tau_2 = \{X, \varphi, \{b\}\}$$

تبولوجيان معرفان على X ولكن
اتحادهم لايمثل تبولوجي على X وذلك لأن $\{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$

3- تقاطع تبولوجيات يمثل تبولوجي على X (صح)

البرهان :

1- بما أن $X, \varphi \in \tau_s$ لكل $s \in S$ إذن $X, \varphi \in \bigcap_{s \in S} \tau_s$.

2- (توضيح : لكي نثبت الشرط الثاني نفرض مجموعه من العناصر تنتمي إلى التقاطع وعلينا أثبات أن اتحاد هذه العناصر ينتمي أيضا إلى التقاطع)

نفرض أن $A_i \in \bigcap_{s\in S} \tau_s$ لكل $i\in I$

إذن $A_i \in \tau_s$ لكل $i\in I$ ولكل $s\in S$

(وذلك لأن من الطبيعي إذا كانت العناصر تنتمي إلى (المجموعه الصغيره) التقاطع بين التبولوجيات فهي تنتمي إلى(المجموعه الكبيره) كل تبولوجي

إذن $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau_s$ لكل $s\in S$

حيث أن Ts تبولوجي على X لكل $s\in S$

ومنه فإن $\bigcup_{i\in I} A_i \in \bigcap_{s\in S} \tau_s$

3 – (توضيح : لكي نثبت الشرط الثالث نفرض عنصرين ينتميان إلى التقاطع وعلينا أثبات أن تقاطع هذين العنصرين ينتميان أيضا إلى التقاطع أيضا)

ليكن $A,B \in \bigcap_{s\in S} \tau_s$ لكل $s\in S$

إذن $A,B \in \tau_s$ للكل $s\in S$

ومنه فإن $A\cap B \in \tau_s$ لكل $s\in S$

حيث أن τ_s تبولوجي على X لكل $s\in S$

إذن نستنتج أن $A\cap B \in \bigcap_{s\in S} \tau_s$ لكل $s\in S$

من 1 و2 و3 نستنتج أن تقاطع التبولوجيات يشكل تبولوجي على X

التمارين

1- إذا كانت X مجموعه غير خاليه ،

$$\tau = \{\varphi, A \subseteq X : A^c \text{ is finite}\}$$

أي أن τ هو مجموعة كل المجموعات الجزئيه من X التي تكون مكملاتها منتهيه ، فبين أن τ يشكل تبولوجيا على X .

2- نفرض ان X مجموعه غير خاليه ،

$$\tau = \{\varphi, A \subseteq X : A^c \text{ is countable}\}$$

أي أن τ هو مجموعة كل المجموعات الجزئيه من X التي تكون مكملاتها قابله للعد ، فبين أن τ يشكل تبولوجيا على X

ملاحظه التمارين سيتم حلها في بداية كل درس قادم بإذن الله

حل التمارين

ملاحظه: التمرينين طريقة أثباتهم متشابهه جدا لذلك سأبرهن الأول وأترك الثاني لكم

1- إذا كانت X مجموعه غير خاليه ،

$$\tau = \{\varphi, A \subseteq X : A^c \text{ is finite}\}$$

أي أن τ هو مجموعة كل المجموعات الجزئيه من X التي تكون مكملاتها منتهيه ، فبين أن τ يشكل تبولوجيا على X .

الحل :

1- واضح أن $X, \varphi \in \tau$ لأن مكملة X هي المجموعة الخالية ϕ وهي مجموعه منتهيه.

2- نفرض أن $\{A_s \in \tau : s \in S\}$ (علينا أثبات أن $\bigcup_{s\in S} A_s \in \tau$)

بما أن $A_s \in \tau$ إذن A_s^c مجموعه منتهيه(وذلك من تعريفنا لـ τ)

ومن ثم فإن $\bigcap_{s\in S} A_s^c$ (لأن المجموعه الكبيره منتهيه فبالتأكيد الصغيره منتهيه)وبما أن

$\left(\bigcup_{s\in S} A_s\right)^c = \bigcap_{s\in S} A_s^c$ (من قانون دي مورجان)

إذن $\left(\bigcup_{s\in S} A_s\right)^c$ مجموعة منتهية

وبناء على ذلك فإن $\bigcup_{s\in S} A_s \in \tau$

3- لتكن $A,B\in\tau$ (علينا أثبات أن $A\cap B\in\tau$)

بما أن $A,B\in\tau$ فإن A^c,B^c مجموعتان منتهيتان

ومن ثم فإن $A^c\cup B^c$

مجموعه منتهيه

ولكن

(ومن قانون دي مورجان) $A^c\cup B^c=(A\cap B)^c$

إذن $(A\cap B)^c$ مجموعه منتهيه

ومنه فإن $A\cap B\in\tau$

من 1 و2 و3 نستنتج أن τ يمثل تبولوجي على X

ويطلق عليه تبولوجي المكملات المنتهيه (Finite complement topology)أو((Cofinite topology

الدرس الثاني

قد يأتي التبولوجي على صورة مجموعه من العناصر حينها يكون من السهل علينا تحديد المجموعات المفتوحه ولكن قد يأتي أيضا بصورة ذكر الصفه المميزه كما في التمرينيين السابقين وفي هذه الحاله لن يكون من السهل علينا أيجاد وتحديد المجموعات المفتوحه لذلك يوجد تعريف مكافئ لتعريف المجموعه المفتوحه

نظريه:

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجي ، $A \subseteq X$ ،فإن $A \in \tau$ (مجموعه مفتوحه) إذا وإذا فقط لكل $x \in A$ يوجد $B \in \tau$ بحيث أن $x \in B \subseteq A$

سؤال:

في الفراغ المتقطع X لأي $x \in X$ فإن $\{x\}$ (وحيدة العنصر) هي مجموعه مفتوحه ؟

نعم لأن التبولوجي المعرف على X هو $\tau = P(X)$ وحيث أن $\{x\} \subset X$ فإن

$x \in X$ إذن $\{x\}$ مجموعه مفتوحه

تعريف المجموعات المغلقه:

نفرض أن (X,τ) فضاء تبولوجي، و $A \subseteq X$ تسمى A مجموعه مغلقه (Closed set) بالنسبه إلى τ إذا كانت A^c مجموعه مفتوحه بالنسبه إلى τ

وسوف نرمز إلى مجموعة المجموعات المغلقه في الفضاء التبولوجي (X,τ) بالرمز $\Im$ او $\Im_X$.

مثال:

إذا كان

$X=\{a,b,c\}$

$\tau=\{X,\varphi,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$

فاحسب $\Im$؟

$\Im=\{X,\varphi,\{b,c\},\{a,b\},\{b\}\}$

مثال:

1- المجموعتين المغلقتين الوحيدتين في الـ indiscrete top هما X,ϕ أي أن كل مجموعه جزئيه منه هي مجموعه مفتوحه ومغلقه معا

2-المجموعات المغلقه في الـ Cofinite topology هي كل المجموعات الجزئيه المنتهيه بالإضافه إلى X

سؤال:

اثبت صحة العباره التاليه:

في الـ discrete top كل مجموعه جزئيه منه هي مجموعه مفتوحه ومغلقه معا

الحل:

في الفراغ المتقطع $\tau = P(X)$

لأي $A \subseteq X$ فإن A مجموعه مفتوحه

و لأي $A \subseteq X$ نجد أن $A^c \subseteq X$

إذن

A^c مجموعه مفتوحه

ومنه فإن A مجموعه مغلقه

تعريف:

نفرض أن (X,τ) فضاء تبولوجي، $A \subseteq X$ ، $\mathfrak{F}$ مجموعه كل المجموعات المغلقه بالنسبه لـ(X,τ) ، نعرف لصاقة(غلاقة A) (Closure)ويرمز لها بالرمز $\bar{A}$ أو $Cl(A)$ بأنها المجموعه الناتجه من تقاطع كل المجموعات الجزئيه المغلقه والمحتويه على A.

بصيغه أخرى

$Cl(A)$ هي أصغر مجموعه مغلقه تحوي A

سؤال :

متى تكون $Cl(A) = A$ ؟

إذا كانت A مجموعه مغلقه

مثال:

لتكن $X=\{1,2,3,4,5\}$

$$\tau=\{X,\ \varphi,\{1\},\{3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4,5\}\}$$

$A=\{2,5\}$

احسب $Cl(A)$ ؟

خطوات الحل:

1-نوجد المجموعات المغلقه في X

2-نحدد المجموعات المغلقه التي تحوي A

3-نقوم بإجراء التقاطع بين هذه المجوعات

الحل:

$$\Im=\{X,\varphi,\{2,3,4,5\},\{1,2,5\},\{2,5\},\{1\}\}$$

نستنتج هنا في هذا المثال أن $Cl(A) = A=\{2,5\}$ مباشره وذلك لأن A مجموعه مغلقه

تعريف مكافئ لـ $Cl(A)$

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجي، و $A\subseteq X$ ، فإن $x\in\bar{A}$ إذا وإذا فقط كل مجموعه مفتوحه V تحتوي على x تحتوي على الأقل عنصر من A أي ان

$$x\in\bar{A}\Leftrightarrow A\cap V\neq\varphi\ ,\ \forall\ V\in\tau\ ,\ x\in V$$

مثال:

لتكن $X=\{1,2,3,4,5\}$

$$\tau=\{X,\ \varphi,\{1\},\{3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4,5\}\}$$

$A=\{2,5\}$

هل $3\in\bar{A}$ ؟

خطوات الحل:

1 - نحدد المجموعات المفتوحه التي تحوي 3

2- نبحث تقاطع A مع المجموعات المفتوحه السابقة الذكر

إذا وجدنا أن حاصل تقاطع A مع احدى المجموعات المفتوحه يساوي ϕ نتوقف ونقول إن 3 لا تنتمي إلى $Cl(A)$

أما إذا كانت جميع التقاطعات لا تساوي ϕ فإننا نستنتج أن 3 ينتمي إلى $Cl(A)$

ملاحظه : من الطبيعي ان العنصر 2و5 ينتميان إلى $Cl(A)$ وذلك من التعريف ولكننا عند دراسة $Cl(A)$ ندرس العناصر التي لاتقع بداخل A

الحل:

1-المجموعات المفتوحه التي تحوي 3 هي

$X,\{3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4,5\}$

-2

$$X\cap\{2,5\}=\{2,5\}\neq\varphi$$

$$\{3,4\}\cap\{2,5\}=\varphi \quad\Rightarrow 3\notin\bar{A}$$

تعريف:

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجي، $A\subseteq X$، نقول إن A كثيفه (Dense) في X إذا كان $\bar{A}=X$

التمارين

حدد صحة أو خطأ العبارات التاليه:

1 - $x \notin \bar{A}$ إذا وجدت مجموعه مفتوحه V تحوي x بحيث أن

$V \not\subset A$

2- إذا كانت $\bar{A} \subset X$ فإن A كثيفه

3- في الفراغ التبولوجي الغير المتقطع كل مجموعه جزئيه منه كثيفه

4-إذا كانت $A \neq B$ فإن $\bar{A} \neq \bar{B}$

حل التمارين:

سأقوم بحل الفقرتين الأكثر دقه والأخرى عليكم

حدد صحة أو خطأ العبارات التاليه:

1- $x \notin \bar{A}$ إذا وجدت مجموعه مفتوحه V تحوي x بحيث أن $V \subset A$

العباره خاطئة

لأن $A \cap V = \varnothing \not\Rightarrow V \subset A$

أي أنه من المحتمل أن يكون $A \cap V \neq \varnothing$

4- $A \neq B \rightarrow \bar{A} \neq \bar{B}$

عباره خاطئه لأن في حالة كانت A كثيفة

فإن $A \neq X$ ولكن $\bar{A} = \bar{X}$

الدرس الثالث:

تعريف :

نفرض أن (X,τ) فضاء تبولوجي ، $A \subseteq X$ 0 النقطة $x \in X$ تسمى نقطة نهاية أو نقطة تراكم (Limit point) للمجموعة A إذا وإذا فقط كانت كل مجموعه مفتوحه V تحتوي على x تحتوي على الأقل نقطة أخرى من A تختلف عن x أي أن

$$A \cap (V \setminus \{x\}) \neq \varnothing$$

وتسمى مجموعة كل نقاط النهاية للمجموعه A مشتقة A ويرمز لها بالرمز A' أو $d(A)$

مثال :

$$X = \{a,b,c,d,e\}$$
$$\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$$
$$A = \{a,b,c\}$$

احسب $d(A)$ ؟

الحل :

1- $x = a$ ، (المجموعات المفتوحه التي تحوي a)

$$\{a,b,c\} \cap X \setminus \{a\} = \{b,c\} \neq \varnothing$$
$$\{a,b,c\} \cap \{a\} \setminus \{a\} = \varnothing$$
$$\Rightarrow \quad a \in d(A)$$

ملاحظه : نتوقف هنا ولا نكمل ونحسب جميع المجموعات المفتوحه التي تحوي a لأنه يتبين لنا من هنا مباشرة أنه التعريف قد اختل

2- $x = b$ ، (المجموعات المفتوحه التي تحوي b)

$$\{a,b,c\} \cap X \setminus \{b\} = \{a,c\} \neq \varnothing$$
$$\{a,b,c\} \cap \{b,c,d,e\} \setminus \{b\} = \{c\} \neq \varnothing$$
$$\Rightarrow b \in d(A)$$

3- $x = c$ ، (المجموعات المفتوحه التي تحوي c)

$$\{a,b,c\} \cap X \setminus \{c\} = \{a,b\} \neq \varnothing$$
$$\{a,b,c\} \cap \{c,d\} \setminus \{c\} = \varnothing$$
$$\Rightarrow \quad c \notin d(A)$$

4- $x=d$ ، (المجموعات المفتوحه التي تحوي d)

$$\{a,b,c\} \cap X \setminus \{d\} = \{a,b,c\} \neq \varnothing$$
$$\{a,b,c\} \cap \{c,d\} \setminus \{d\} = \{c\} \neq \varnothing$$
$$\{a,b,c\} \cap \{a,c,d\} \setminus \{d\} = \{a,c\} \neq \varnothing$$
$$\{a,b,c\} \cap \{b,c,d,e\} \setminus \{d\} = \{b,c\} \neq \varnothing$$
$$\Rightarrow d \in d(A)$$

5- $x = e$ ، (المجموعات المفتوحه التي تحوي e)

$$\{a,b,c\} \cap X \setminus \{e\} = \{a,b,c\} \neq \varnothing$$
$$\{a,b,c\} \cap \{b,c,d,e\} \setminus \{e\} = \{b,c\} \neq \varnothing$$
$$\Rightarrow e \in d(A)$$

إذن نستنتج أن :

$$d(A) = \{b,d,e\}$$

مثال :

احسب $d(A)$ في :

١ -الفراغ الغير متقطع X (Discrete topology) لأي $A \subseteq X$
٢ -الفراغ المتقطع X (Indiscrete topology) لأي $A \subseteq X$

الحل :

-1

لأي $p \in X$ المجموعات المفتوحه التي تحويها هي فقط X

إذا كانت تحوي عنصر واحد فقط A={x}

وكان $x = p$ فإن :

$$A \cap X \setminus \{p\} = \varnothing \quad \Rightarrow \quad p \notin d(A)$$
$$\therefore d(A) = \varnothing$$

وكان $x \neq p$ فإن :

$$A \cap X \setminus \{x\} = p \neq \varnothing$$
$$\therefore d(A) = X$$

إذا كانت A تحوي أكثر من عنصر :

$$A \cap X \setminus \{p\} \neq \varnothing$$
$$\therefore d(A) = X$$

إذن نستنتج أن :

$$d(A) = \begin{cases} \varnothing & \text{if} \quad A=\varnothing \\ X-\{p\} & \text{if} \quad A=\{p\} \\ X & \text{if} \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

حيث otherwise تعني أن A تحتوي على أكثر من عنصر

-2

لأي $x \in X$ نجد أن $\{x\}$ مجموعه مفتوحه تحوي x وتحقق أن :

$$A \cap \{x\} \setminus \{x\} = \varnothing$$

أي أن لأي $x \in X$ فإن $x \notin d(A)$

$$\therefore d(A) = \varnothing$$

نظرية :

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجي ، $A,B,C \subseteq X$ فإن :

- $d(\varnothing) = \varnothing$
- إذا كانت $A \subseteq B$ فإن $d(A) \subseteq d(B)$
- إذا كانت $x \in d(C)$ فإن $x \in d(C \setminus \{x\})$
- $d(A \cup B) = d(A) \cup d(B)$
- A مجموعة مغلقة إذا وإذا كان فقط $d(A) \subseteq A$
- $\bar{A} = A \cup d(A)$

تمارين :

حدد صحة أو خطأ العبارات التاليه مع التعليل في كلتا الحالتين :

- $x \notin d(A)$ إذا وفقط إذا كان $U \cap A \neq \varnothing$ لكل مجموعة مفتوحة U تحوي x

- إذا كانت $x \in \bar{A}$ فإن $x \in d(A)$
- إذا كان $d(A) = \varnothing$ فإن A مجموعة مغلقة
- $x \in \{x\}'$
- $d(A \cap B) \subseteq d(A) \cap d(B)$

السؤال الثاني :

$X = R$ مجموعة الأعداد الحقيقية ونعرف عليه تبولوجي المكملات المنتهية لأي $A \subseteq R$ أوجد $d(A)$ مع توضيح الحل

أتمنى أن أرى بعض من مشاركاتكم في حل التمارين إلى أن أكتب الدرس القادم بإذن الله في الأسبوع المقبل

حل التمارين :

حدد صحة أو خطأ العبارات التاليه مع التعليل في كلتا الحالتين :

- $x \notin d(A)$ إذا وفقط إذا كان $U \cap A \neq \emptyset$ لكل مجموعة مفتوحة U تحوي x

عباره خاطئه وذلك لأن

$$U \cap A \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow U \setminus \{x\} \cap A = \emptyset \quad \vee \quad U \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow x \notin d(A) \quad \vee \quad x \in d(A)$$

- إذا كانت $x \in \bar{A}$ فإن $x \in d(A)$

عباره خاطئه وذلك لأن

$$\bar{A} = A \cup d(A)$$
$$\rightarrow x \in \bar{A}$$
$$\rightarrow x \in A \quad \vee \quad x \in d(A)$$

- إذا كان $d(A) = \emptyset$ فإن A مجموعة مغلقة

عباره خاطئه $d(A) = \emptyset$ فإن A مجموعة مغلقة ومفتوحه

- $x \in \{x\}'$

عباره خاطئه وذلك من التعريف $\{x\} \cap (V \setminus \{x\}) = \emptyset$ لكل مجموعه مفتوحه V تحوي x إذن $x \notin \{x\}'$

- $d(A \cap B) \subseteq d(A) \cap d(B)$

عباره صحيحه

البرهان :

نفرض

$$x \in d(A \cap B)$$

$\Leftarrow$ لكل مجموعه مفتوحه V تحوي x تحقق ان :

$$(A \cap B) \cap (V \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow A \cap (V \setminus \{x\}) \neq \emptyset \quad \wedge \quad B \cap (V \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow x \in d(A) \quad \wedge \quad x \in d(B)$$
$$\Rightarrow x \in d(A) \cap d(B)$$

السؤال الثاني :

$X = R$ مجموعة الأعداد الحقيقية ونعرف عليه تبولوجي المكملات المنتهية لأي $A \subseteq R$ أوجد $d(A)$ مع توضيح الحل

الحل:

$$\tau = \{R, \emptyset, A \subseteq R : A^c \text{ is finite}\}$$

(١) إذا كانت A مجموعه غير منتهيه (infinite set):

لأي $x \in R$ وأي مجموعه مفتوحه O تحوي x فإن $O^c = R \setminus O$ مجموعه منتهيه وهذا يعني أن O تحوي عدد من عناصر A تختلف عن x

$$\rightarrow x \in d(A)$$
$$\therefore d(A) = R$$

(2) إذا كانت A مجموعه منتهيه :

لأي

$x \in R$

$x \notin A$

$A^c = O$ مجموعه مفتوحه (لأن مكملتها A منتهيه) تحوي x لكن :

$A \cap O \setminus \{x\} =$

$A \cap A^c \setminus \{x\} = \varnothing$

$\rightarrow x \notin d(A)$

$x \in A$

A^c مكملتها هي A مجموعه منتهيه ، إذن A^c مجموعه مفتوحه المجموعه

$A^c \cup \{x\}$ مجموعه مفتوحه تحوي x لكن :

$A \cap (A^c \cup \{x\}) \setminus \{x\} = \varnothing$

$\rightarrow x \notin d(A)$

إذن نستنتج هنا ان في هذه الحاله $\therefore d(A) = \varnothing$

الدرس الرابع

تعريف :

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجي ، $A \subseteq X$ فإننا نقول إن :

(١) النقطة $x \in A$ أنها نقطة داخليه (Interior Point) لـ A :

إذا وجدت $U \in \tau$ بحيث أن $x \in U \subseteq A$ ويطلق على مجموعة النقط الداخلية لـ A المجموعة الداخلية لـ (داخل) A ، ويرمز لها بالرمز A° أو $\mathrm{Int}(A)$

(٢) النقطة $x \in X$ أنها نقطة خارجية (Interior Point) لـ A :

إذا كانت x نقطة داخليه لـ A^{c} أي أن $x \in (A^{c})^{\circ}$ ويطلق على مجموعة النقاط الخارجيه لـ A المجموعة الخارجية لـ (خارج) A ويرمز لها بالرمز $\mathrm{Ext}(A)$

(٣) النقطة $x \in X$ أنها نقطة حدية (Boundary Point) لـ A :

إذا كانت $x \in X \setminus (A^{\circ} \cup \mathrm{Ext}(A))$ أو $x \in X \setminus \left(A^{\circ} \cup (A^{c})^{\circ}\right)$ ويطلق على مجموعة النقاط الحدية لـ A المجموعة الحدية لـ A ويرمز لها بالرمز $b(A)$

مثال :

نفرض أن

$$\tau = \{X, \varnothing \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$$

تبولوجي معرف على $X = \{a,b,c,d,e\}$ فإذا كانت $A = \{b,c,d\}$ ،

$B = \{c,e\}$ فأوجد $b(B), Ext(B), B^{\circ}, b(A), Ext(A), A^{\circ}$

الحل :

أولا : نحسب A° :

(ملاحظه : نختبر فقط نقاط A)

(١) $x = b$

لا توجد مجموعه مفتوحة تحوي b وتقع بالكامل داخل A

$$\therefore b \notin A^{\circ}$$

(٢) $x = c$

نجد أن

$$c \in \{c,d\}$$

$$\{c,d\} \subseteq \{b,c,d\}$$

$$\therefore c \in A^{\circ}$$

(٣) $x = d$

نجد أن

$$d \in \{c,d\} \subseteq A$$

$$\therefore d \in A^{\circ}$$

$$\Rightarrow A^{\circ} = \{c,d\}$$

وبالمثل حساب B° فيترك كتمرين للقارئ

ثانيا : نحسب $Ext(A)$:

(1) $a \in A^{c}$:

نجد أن

$$\{a\} \in \tau$$

$$a \in \{a\} \subseteq A^c$$

$$\therefore a \in (A^c)^\circ$$

(2) $e \in A^c$:

ولكن لا توجد مجموعه مفتوحه تحوي e وتقع بالكامل داخل A^c

$$\therefore e \in (A^c)^\circ$$

$\Leftarrow$ $(A^c)^\circ = \{a\}$ أي أن $Ext(A) = \{a\}$

وبالمثل حساب $Ext(B)$ فيترك كتمرين للقارئ

ثالثا نحسب $b(A)$:

بما أن :

$$Ext(A) \cup A^\circ = \{a, c, d\}$$

فإن :

$$b(A) = \{b, e\}$$

وبالمثل حساب $b(B)$ فيترك كتمرين للقارئ

نظريه :

إذا كان (X, τ)فضاء تبولوجي ، $A, B \subseteq X$ فإن :

(١) A° مجموعه مفتوحة

(٢) A مجموعه مفتوحة إذا وإذا كان فقط $A^\circ = A$

(٣) A°أكبر مجموعه مفتوحة محتواه داخل A

(٤) $\varnothing^\circ = \varnothing$, $X^\circ = X$

(٥) إذا كانت $A \subseteq B$ فإن $A^\circ \subseteq B^\circ$

(٦) $A^\circ \subseteq A$

(٧) $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$

(٨) $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$

$$(A^{\circ})^{\circ} = A \quad (١)$$

$$\mathrm{Ext}(A) \cap A^{\circ} = \varnothing \quad (٢)$$

$$b(A) \cap A^{\circ} = \varnothing \quad (٣)$$

$$b(A) \cap \mathrm{Ext}(A) = \varnothing \quad (٤)$$

$$b(A) \cup \mathrm{Ext}(A) \cup A^{\circ} = X \quad (٥)$$

$$\overline{A} = b(A) \cup A^{\circ} \quad (٦)$$

$$(A^{\circ})^{C} = \overline{(A^{C})} \quad (٧)$$

$$(\overline{A})^{C} = (A^{C})^{\circ} \quad (٨)$$

البرهان :

هناك الكثير من الفقرات يتضح برهانها من النظر مباشرة لذلك سأبرهن فقط الفقرات التي تحتاج إلى برهان

✓ إذا كانت $A \subseteq B$ فإن $A^{\circ} \subseteq B^{\circ}$

نفرض $x \in A^{\circ}$ إذن توجد مجموعه مفتوحة U تحوي x بحيث تحقق أن :

$$x \in U \subseteq A$$

لكن

$$A \subseteq B$$

وبالتالي فإن :

$$\Rightarrow x \in U \subseteq B$$

$$\Rightarrow x \in B^{\circ}$$

إذن نستنتج أن :

$$A^{\circ} \subseteq B^{\circ}$$

$$A^{\circ} \cap B^{\circ} = (A \cap B)^{\circ} \checkmark$$

الاتجاه الأول :

نفرض $x \in A^{\circ} \cap B^{\circ}$

$$\Rightarrow x \in A^{\circ} \quad \wedge \quad x \in B^{\circ}$$

وبما أن $x \in A^{\circ}$ إذن توجد مجموعه مفتوحة U تحوي x بحيث تحقق أن :

$$x \in U \subseteq A \quad \cdots(1)$$

وبما أن $x \in B^{\circ}$ إذن توجد مجموعه مفتوحة V تحوي x بحيث تحقق أن :

$$x \in V \subseteq B \quad \cdots(2)$$

من (1) و (2) نجد أن :

$$x \in U \cap V \subseteq A \cap B$$

لكن $(U \cap V)$ مجموعه مفتوحه تحوي x أي أن

$$x \in (A \cap B)^{\circ}$$

إذن نستنتج أن :

$$A^{\circ} \cap B^{\circ} \subseteq (A \cap B)^{\circ}$$

الاتجاه الثاني :

معلوم أن :

$$A \cap B \subseteq A$$

$$\Rightarrow (A \cap B)^{\circ} \subseteq A^{\circ} \cdots(1)$$

ومعلوم أن :

$$A \cap B \subseteq B$$

$$\Rightarrow (A \cap B)^{\circ} \subseteq B^{\circ} \cdots(2)$$

من (1) و (2) نجد أن :

$$(A \cap B)^{\circ} \subseteq A^{\circ} \cap B^{\circ}$$

إذن من الاتجاه الاول و الثاني تتحقق المساواه

$$A^{\circ} \cup B^{\circ} \subseteq (A \cup B)^{\circ}$$ ✓

معلوم أن

$$A \subseteq A \cup B$$

$$\Rightarrow A^{\circ} \subseteq (A \cup B)^{\circ} \cdots (1)$$

$$B \subseteq A \cup B$$

$$\Rightarrow B^{\circ} \subseteq (A \cup B)^{\circ} \cdots (2)$$

من (1) و (2) نجد أن :

$$A^{\circ} \cup B^{\circ} \subseteq (A \cup B)^{\circ}$$

$$\text{Ext}(A) \cap A^{\circ} = \varnothing$$ ✓

ملاحظه : فقره 10 و 11 و 12و 13 جميعا مباشره وواضحه من التعريف ولكن سأبرهن إحداها وبطريقتين مختلفتين والباقي سيكون بنفس الطريقه

من التعريف لـ Ext A:

$$A^{\circ} \cap (A^{c})^{\circ} = (A \cap A^{c})^{\circ} = \varnothing$$

بطريقه أخرى:

معلوم أن

$$A \cap A^{c} = \varnothing$$

لكن

$$A^{\circ} \subseteq A$$

$$(A^{c})^{\circ} \subseteq A^{c}$$

وبالتالي فإن

$$A^{\circ} \cap (A^{c})^{\circ} \subseteq A \cap A^{c}$$

$$\because A \cap A^{c} = \varnothing \Rightarrow A^{\circ} \cap (A^{c})^{\circ} = \varnothing$$

نستنتج من الخواص 10 و11 و12 و13 أن $b(A), Ext(A), A^{\circ}$ تمثل تجزيئا للفراغ X (لأن اتحادهم X وتقاطعهم $\varnothing$)

$$\bar{A} = b(A) \cup A^{\circ} \checkmark$$

من العلاقة :

$$b(A) \cup Ext(A) \cup A^{\circ} = X$$

$$A^{\circ} \cap b(A) = X \setminus Ext\ A$$

إذن نجد أن المطلوب إثباته في السؤال يكافئ هذه العلاقة :

$$(\bar{A})^{c} = Ext\ A$$

نثبت الآن العلاقه المكافئة بخطوتين :

$$(\bar{A})^{c} \subseteq Ext\ A \qquad (١)$$

$$Ext\ A \subseteq (\bar{A})^{c} \qquad (٢)$$

لإثبات (1) :

نفرض أن

$$x \in (\bar{A})^{c} \quad \Rightarrow \quad x \notin \bar{A}$$

من التعريف أي أن توجد مجموعة مفتوحة V تحوي x بحيث أن :

$$A \cap V = \varnothing$$

ومنه فإن

$$V \subseteq A^{c}$$

$$\rightarrow x \in V \subseteq A^{c}$$

$$\rightarrow x \in (A^{c})^{\circ} = Ext(A)$$

إذن نستنتج أن :

$$(\bar{A})^{c} \subseteq Ext\ A \qquad \cdots(1)$$

لإثبات (2) :

نفرض أن

$$x \in \mathrm{Ext}(A) = (A^c)^{\circ}$$

من التعريف أي أن توجد مجموعة مفتوحة V تحوي x بحيث أن :

$$x \in V \subseteq A^c$$

ومنه فإن

$$\rightarrow V \cap A = \varnothing$$

$$\therefore x \notin \bar{A} \Rightarrow x \notin (\bar{A})^c$$

إذن نستنتج أن :

$$\mathrm{Ext}\ A \subseteq (\bar{A})^c \qquad \cdots(2)$$

من (1) و (2) تتحقق المساواة

$$(A^{\circ})^c = \overline{(A^c)} \checkmark$$

ملاحظه :

فقره 15 و 16 بنفس الطريقه لذلك سأبرهن واحده منهم

أولا: نثبت أن $(A^{\circ})^c \subseteq \overline{(A^c)}$:

نفرض أن :

$$x \notin \overline{A^c}$$

من التعريف : توجد مجموعه مفتوحة V تحوي x بحيث أن :

$$A^c \cap V = \varnothing$$

أي أن :

$$\rightarrow V \subseteq A$$

$$\rightarrow x \in V \subseteq A$$

إذن وجدت مجموعه مفتوحه V تحوي x وتقع بالكامل داخل A وهذا يعني :

$$x \in A^{\circ} \Rightarrow x \notin (A^{\circ})^c$$

إذن نستنتج أن :

$$(A^{\circ})^{c} \subseteq \overline{(A^{c})} \quad \cdots(1)$$

ثانيا : نثبت أن $\overline{(A^{c})} \subseteq (A^{\circ})^{c}$:

نفرض أن :

$$x \notin (A^{\circ})^{c}$$

$$\rightarrow x \in A^{\circ}$$

تطبيق التعريف : توجد مجموعه مفتوحة V تحوي x بحيث أن :

$$x \in V \subseteq A$$

$$\rightarrow A^{c} \cap V = \varnothing$$

$$\rightarrow x \notin \overline{A^{c}}$$

تمارين :

وضح صحة أو خطأ العبارات التاليه مع التوضيح في كلتا الحالتين :

(١) $\text{int } A = \bar{A}$ إذا و فقط إذا كانت A مجموعه مفتوحه ومغلقه معا

(٢) $x \notin b(A) \rightarrow x \in A^{\circ}$

(٣) إذا كانت كل مجموعه مفتوحة U تحوي x تحقق $U \subseteq A$ فإن $x \in A^{\circ}$

(٤) إذا كانت A مجموعه مفتوحه فإن $b(A) \cap A = \varnothing$

(٥) $\text{int } \bar{A} = \varnothing \Leftrightarrow A$ كثيفه

(٦) $\text{int } A \subseteq A \rightarrow A$ مفتوحه

(٧) $(A \cup B)^{\circ} \subseteq A^{\circ} \cup B^{\circ}$

(٨) $x \notin A^{\circ}$ إذا كانت $x \notin A$

(٩) إذا كانت $A, B \subseteq (X, \tau)$ وكان $A \cap B \neq \varnothing$ فإن $(A \cap B)^{\circ} \neq \varnothing$

(١) إذا كانت D مجموعه كثيفه في (X,τ) فإن مكملة D في X ليس لها نقاط داخليه

السؤال الثاني :

أوجد $b(A), Ext(A), A^{\circ}$ إذا كان :

- (X,τ) الفضاء التبولوجي المنفصل(Discrete topology) ، $\emptyset \neq A \subseteq X$
- (X,τ) الفضاء التبولوجي غير المنفصل (Indiscrete topology) ، $\emptyset \neq A \subseteq X$)

السؤال الثالث :

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجي ، $A,B \subseteq X$ فبين ان :

- $b(\overline{A}) \subseteq b(A)$
- $b(A^{\circ}) \subseteq b(A)$
- $b(A \cup B) \subseteq b(A) \cup b(B)$
- $A \in \tau \Rightarrow A \subseteq (\overline{A})^{\circ}$
- $A \in \Im_X \Rightarrow \overline{A^{\circ}} \subseteq A$
- $\left(\overline{(\overline{A})^{\circ}}\right)^{\circ} = (\overline{A})^{\circ}$, $\overline{\left(\overline{(A^{\circ})}\right)^{\circ}} = \overline{A^{\circ}}$

السؤال الرابع :

إذا كانت V مجموعه مفتوحه في الفضاء التبولوجي (X,τ) بحيث أن $V \subseteq W$ فبين أن $V \subseteq W^{\circ}$

حل التمارين :

وضح صحة أو خطأ العبارات التاليه مع التوضيح في كلتا الحالتين :

(5) $\text{int } \bar{A}=\emptyset \Leftrightarrow A$ كثيفـــــه

عباره خاطئة وذلك لأن

$$\bar{A} = X \Rightarrow \text{int}\left(\bar{A}\right) = \text{int}\, X = X \neq \emptyset$$

(6) $\text{int}\, A \subseteq A \rightarrow$ Aمفتوحـــه

(عباره خاطئه) مثال يوضح خطأ العباره :

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$
$$X = \{a,b,c\}$$
$$A=\{a,c\} \quad , \quad A^{\circ} = \{a\}$$

واضح أن : $A^{\circ} \subseteq A$ ولكن A غير مفتوحه

(7) $(A \cup B)^{\circ} \subseteq A^{\circ} \cup B^{\circ}$

(عبارة خاطئة) مثال يوضح خطأ العبارة :

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$
$$X = \{a,b,c\}$$
$$A = \{b\} \quad , \quad B=\{a,c\} \quad , \quad A^{\circ} = \{b\} \quad , \quad B^{\circ} = \{a\}$$
$$(A \cup B)^{\circ} = X$$
$$X \not\subseteq \{a,b\} \Rightarrow (A \cup B)^{\circ} \not\subseteq A^{\circ} \cup B^{\circ}$$

(9) إذا كانت $A,B \subseteq (X,\tau)$ وكان $A \cap B \neq \emptyset$ فإن

$$(A \cap B)^{\circ} \neq \emptyset$$

(عباره خاطئه) وذلك لإنه في حالة $A \cap B \neq \emptyset$ فقد تكون

- $(A \cap B)^{\circ} = \emptyset \Leftarrow A^{\circ} \cap B^{\circ} = \emptyset \Leftarrow A^{\circ} = \emptyset$ او $B^{\circ} = \emptyset$
- $A^{\circ} \neq \emptyset \wedge B^{\circ} \neq \emptyset$ فنفرض

$$A^{\circ} \cap B^{\circ} \Leftarrow C^{\circ} \subseteq A^{\circ} \wedge C^{\circ} \subseteq B^{\circ} \Leftarrow C \subseteq A \wedge C \subseteq B \Leftarrow A \cap B = C$$

وقد تكون $C^{\circ} = \emptyset$ فتكون $(A \cap B)^{\circ} = \emptyset$

أي أن العباره غير متحققه دائما

السؤال الثاني :

اوجد $b(A), Ext(A), A^{\circ}$ إذا كان :

- (X,τ) الفضاء التبولوجي المنفصل(Discrete topology) ،

$\emptyset \neq A \subseteq X$

فإن $A^{\circ} = A \quad , \quad Ext(A) = A^{c} \quad , \quad b(A) = \emptyset$

- (X,τ) الفضاء التبولوجي غير المنفصل (Indiscrete topology) ،

$\emptyset \neq A \subseteq X$

فإن $A^{\circ} = \emptyset \quad , \quad Ext(A) = \emptyset \quad , \quad b(A) = X$

السؤال الثالث :

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجي، $A,B \subseteq X$ فبين ان :

☒ $b(\overline{A}) \subseteq b(A)$

$$x \in b(\overline{A}) \to x \in X \setminus \left[(\overline{A})^{\circ} \cup \left((\overline{A})^{c} \right)^{\circ} \right]$$

$$\to x \notin (\overline{A})^{\circ} \quad \wedge \quad x \notin \left((\overline{A})^{c} \right)^{\circ}$$

$$\because A^{\circ} \subset (\overline{A})^{\circ} \to x \notin A^{\circ} \quad \wedge \quad x \notin (A^{c})^{\circ}$$

$$\to x \in b(A)$$

☒ $b(A^{\circ}) \subseteq b(A)$

$$b(A^{\circ}) = \overline{A^{\circ}} \setminus (A^{\circ})^{\circ} = \overline{A^{\circ}} \setminus A^{\circ} \subset \overline{A} \setminus A^{\circ} = b(A)$$

ملاحظه توضيحيه : في الإثبات أوجدت العلاقه $\overline{A^{\circ}} \setminus A^{\circ} \subset \overline{A} \setminus A^{\circ}$ بإستخدامي لبعض الخواص أي كالتالي:

$$A^{\circ} \subset A$$

$$\to \overline{A^{\circ}} \subset \overline{A}$$

$$\to \overline{A^{\circ}} \setminus A^{\circ} \subset \overline{A} \setminus A^{\circ}$$

☒ $b(A \cup B) \subseteq b(A) \cup b(B)$

$$b(A \cup B) = (\overline{A \cup B}) \cap (\overline{X \setminus A \cup B})$$

$$= (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{X \setminus A \cap X \setminus B})$$

$$\subseteq (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{X \setminus A} \cap \overline{X \setminus B})$$

$$= (\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}) \cup (\overline{B} \cap \overline{X \setminus B})$$

$$= b(A) \cup b(B)$$

☒ $A \in \tau \Rightarrow A \subseteq (\overline{A})^{\circ}$

$$\because A \subset \overline{A} \rightarrow A^{\circ} \subseteq \overline{A}^{\circ}$$

$$\because A \in \tau \rightarrow A = A^{\circ}$$

$$\Rightarrow A \subseteq (\overline{A})^{\circ}$$

$$A \in \Im_X \Rightarrow \overline{A^{\circ}} \subseteq A \quad \boxtimes$$

$$\because A^{\circ} \subseteq A \rightarrow \overline{A^{\circ}} \subseteq \overline{A}$$

$$\because A \in \Im_X \rightarrow A = \overline{A}$$

$$\Rightarrow \overline{A^{\circ}} \subseteq A$$

$$\left(\overline{(\overline{A})^{\circ}}\right)^{\circ} = (\overline{A})^{\circ} \quad , \quad \overline{\left(\overline{(A^{\circ})}\right)^{\circ}} = \overline{A^{\circ}} \quad \boxtimes$$

سأبرهن $\left(\overline{(\overline{A})^{\circ}}\right)^{\circ} = (\overline{A})^{\circ}$ والثانيه بنفس الطريقه :

$$(\overline{A})^{\circ} \subseteq \overline{A} \quad \rightarrow \quad \overline{(\overline{A})^{\circ}} \subseteq \overline{(\overline{A})} = \overline{A}$$

$$\rightarrow \left(\overline{(\overline{A})^{\circ}}\right)^{\circ} = (\overline{A})^{\circ} \quad \cdots(1)$$

$$(\overline{A})^{\circ} \subseteq \overline{(\overline{A})^{\circ}} \quad \rightarrow \quad \left((\overline{A})^{\circ}\right)^{\circ} \subseteq \left(\overline{(\overline{A})^{\circ}}\right)^{\circ}$$

$$\rightarrow \quad (\overline{A})^{\circ} \subseteq \left(\overline{(\overline{A})^{\circ}}\right)^{\circ} \quad \cdots(2)$$

من (1) و (2) تتحقق المساواة

السؤال الرابع :

إذا كانت V مجموعه مفتوحه في الفضاء التبولوجي (X,τ) بحيث أن $V \subseteq W$ فبين أن $V \subseteq W^{\circ}$

$$V \subseteq W \rightarrow V^{\circ} \subseteq W^{\circ}$$

وبما أن V مجموعه مفتوحه أي أن $V^{\circ} = V$ فإننا نستنتج أن : $V \subseteq W^{\circ}$