جامعة المرقب كلية إعداد المعلمين – زليتن قسم الرياضيات

الاختبار النصفي الأول في مقرر الجبر المجرد1 لطلاب السنة الثالثة للعام الجامعي 2009 – 2010

الإجابة النموذجية

س1.أ.ضعي خط تحت الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المذكورة أمام كل عبارة مما يأتي: [6 درجات]

i) إذا كانت G زمرة تبديلية فإن: { G دورية – G ليست دورية – G مولدة بعنصر واحد – لاشيء مما ذكر }

ii) إذا كانت G زمرة غير منتهية فإن: { G لا تحتوي على عنصر محايد – G تحتوي على عنصرين محايدين – G تحتوي على عدد غير منتهي من العناصر المحايدة – لاشيء مما ذكر }

iii) رتبة العنصر المحايد في كل زمرة تساوي: { 1 – 0 – 2 – 1 إذا كانت الزمرة منتهية، و0 عندما تكون غير منتهية – لاشيء مما ذكر }

iv) العملية * المعرفة على $\Re^+$ بالقاعدة $x*y=x/y$ تكون: { تبديلية – تنسيقية – غير تبديلية – لاشيء مما ذكر }

ب. إذا كان كلاً من $(K,*)$, $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ برهني أن: $(H\cup K,*)$ زمرة جزئية من $(G,*)$ إذا وإذا كان فقط $K\subseteq H$ أو $H\subseteq K$ [4 درجات]

البرهان

من الواضح أنه إذا كان $H\subseteq K$ أو $K\subseteq H$ فإن $H\cup K=H$ أو $H\cup K=K$ وبالتالي فإن $(H\cup K\ ,*)$ تكون زمرة جزئية للزمرة G .

لكي نبرهن الإتجاه الآخر نفرض أن $(H\cup K\ ,*)$ زمرة جزئية من الزمرة G بحيث $K\not\subseteq H$ ، و $H\not\subseteq K$.

هذا يعني وجود عنصرين a,b بحيث $b\in K-H \quad , \quad a\in H-K$

بما أن $(H\cup K\ ,*)$ زمرة جزئية من G فإن $ba\in H\cup K$

عندئذ $ba\in H \quad or \quad ba\in K$

فإذا فرضنا أن $ba\in H$ فإن $baa^{-1}\in H\Rightarrow b\in H$ وهذا تناقض لأن $b\notin H$

وإذا فرضنا أن $ba\in K$ فإن $b^{-1}ba\in K\Rightarrow a\in K$ وهذا تناقض لأن $a\notin K$

إذاً يجب أن يكون $K\subseteq H_1$ أو $H\subseteq K$

س2. ضعي علامة (√) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة الخاطئة ثم برهني العبارة الصحية وأعطِ مثالاً يوضح خطأ العبارة الخاطئة. حيث G زمرة و $a,b\in G$

i) إذا كان $O(a)=O(b)$ فإن $a=b$ ×

ii) إذا كان $a^5=a^2$ فإن $a^{-5}=a^{-2}$ √

iii) إذا كانت G زمرة منتهية فإن رتبة العنصر a تكون منتهية أيضاً. √

vi) معكوس العنصر $(ab)^2$ هو $b^{-2}a^{-2}$ ×

س3. ليكن $G=\{e,a,b,c,d,f,g,h\}$ زمرة مع العملية الثنائية * المعرفة كما بالجدول التالي:

*	e	a	b	c	d	f	g	h
e	e	a	b	c	d	f	g	h
a	a	b	c	e	g	h	f	d
b	b	c	e	a	f	d	h	g
c	c	e	a	b	h	g	d	f
d	d	h	f	g	e	b	c	a
f	f	g	d	h	b	e	a	c
g	g	d	h	f	a	c	e	b
h	h	f	g	d	c	a	b	e

i) أوجدي كلاً من: a^{-1}، رتبة العنصر c، وكل العناصر من الرتبة 2

معكوس العنصر a هو c، ورتبة العنصر c تساوي 4 لأن $c^4=e$ أما العناصر التي من الرتبة 2 هي: b,d,f,g,h

ii) ما هي أصغر زمرة جزئية من G تحتوي العنصرين c,d

أصغر زمرة جزئية من G تحتوي العنصرين c,d هي G نفسها

iii) هل G دورية؟ عللي إجابتك. الزمرة G ليست دورية لأنها ليست تبديلية

vi) أوجدي حل المعادلة $a*x*c=b$

الحل

$$a^{-1}*a*x*c*c^{-1}=a^{-1}*b*c^{-1}$$

$$x=a^{-1}*b*c^{-1}=c*b*a=b$$

س4.أ. أكملي ما يأتي:

i) إذا كان $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$ فإن: $\tau^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$ ، $\tau^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$ ، $|\tau|=2$

ii) الزمرة الجزئية تعرف كما يلي: ليكن G زمرة. المجموعة الجزئية غير الخالية H من G تسمى زمرة جزئية من G بالنسبة للعملية المعرفة على G إذا كانت H زمرة تحت تلك العملية.

iii) لتكن G زمرة وليكن $a\in G$ فإن رتبة العنصر a هي أصغر عدد طبيعي m حيث $a^m=e$ ونعبر عن ذلك بالرمز $O(a)=m$. وإذا لم يوجد مثل هذا العدد m فإننا نقول بأن رتبة العنصر a غير منتهية.

ب. برهني أن $G=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}:ad-bc=1\,;a,b,c,d\in\Re\right\}$ تكون زمرة مع عملية ضرب المصفوفات.

س5.أ) ليكن $W=\Re-\{2\}$،عرفت العملية الثنائية $*$ على W كالتالي $a*b=ab-2a-2b+6$ برهني أن $(W,*)$ تكون زمرة.

ب) برهني أن كل زمرة دورية تكون تبديلية.

البرهان

نفرض أن G زمرة دورية مولدها العنصر a أي أن $G=<a>$

فإذا كان $g,h\in G$ فإن هناك عددين صحيحين r,s بحيث: $g=a^s \quad , \quad h=a^r$

الآن $gh=a^s a^r=a^{s+r}=a^{r+s}=a^r a^s=hg$

وهذا يعني أن G زمرة تبديلية